۲ . ۵ پیوستگی در نقطه

در تعریف حد ، (۱) $\lim_{x\to a} f(x) = L$ ، هیچ اظهار نظری درباره رفتار تابع در خود نقطه a نکردیم. حکم(۱) در مورد آن $x \neq a$ هایی است که در یک همسایگی نقطه a قرار دارند ، بنابراین لزومی ندارد که f در a تعریف شده باشد . حتی ، اگر f در a تعریف شده باشد ، لازم نیست مقدارش مساوی حد L باشد . به هر حال ، اگر f در a تعریف شده باشد و بدانیم که $f(a) = L$ ، آنگاه می گوییم که f در a پیوسته است . به عبارت دیگر ، تعریف زیر را داریم.

تعریف: گوییم تابع f در نقطه a **پیوسته (متصل)** است ، اگر سه شرط زیر برقرار باشد:

(i) $f(a)$ موجود باشد ، یعنی f در a تعریف شده باشد.

(ii) $\lim_{x\to a} f(x)$ موجود باشد.

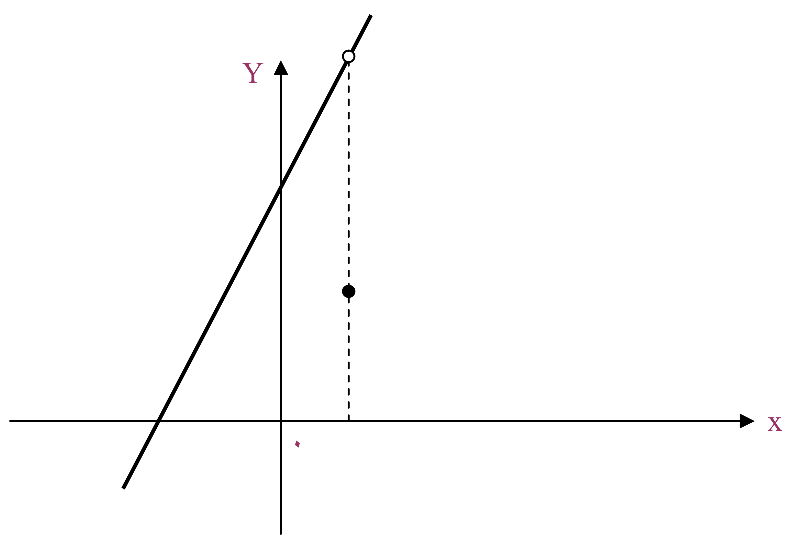
(iii) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

اگر یکی یا بیشتر از این سه شرط در a برقرار نباشد ، تابع f در a **ناپیوسته (منفصل)** نامیده می شود . به عبارت دقیق تر ، تابع f در a پیوسته نامیده می شود ، در صورتی که

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

مثال۱۶: (a) فرض کنیم f به صورت زیر تعریف شده باشد :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(2x+3)(x-1)}{x-1} & , \quad x \neq 1 \\ 2 \quad , \quad x = 1 \end{cases}$$



شکل ۲ . ۸

مشاهده می کنیم که در گراف تابع یک بریدگی در $x=1$ وجـود دارد و بنـابراین بـه بررسـی سـه شرط تعریف بالا می پردازیم. $f(1)=2$ ، پس شرط (i) برقرار است.

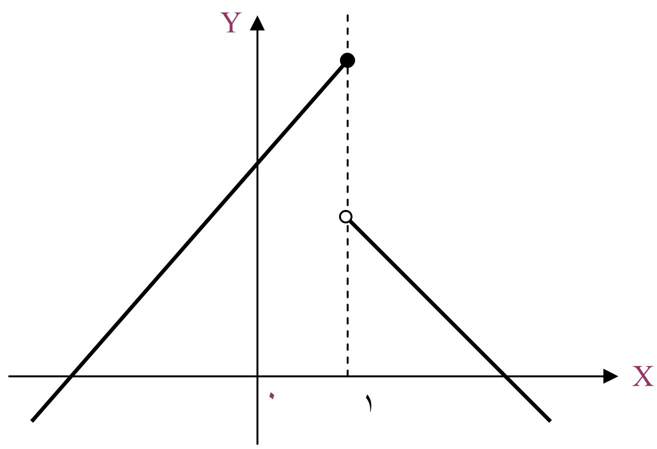
$\lim_{x\to 1} f(x)=5$ ، پس شرط (ii) برقرار است.

$\lim_{x\to 1} f(x)=5$ ولی $f(1)=2$ ، بنابراین شرط (iii) برقرار نیست . نتیجه می گیریم که تابع f در $x=1$ ناپیوسته است .

b) فرض کنیم تابع g به صورت زیر تعریف شده باشد :

$$g(x)=\begin{cases}3+x & , \quad x\le 1\\ 3-x & , \quad x>1\end{cases}$$

چون در گراف تابع یک پرش در نقطه $x=1$ وجود دارد ، شرایط تعریف بالا را بررسی می کنیم.



شکل ۲ . ۹

داریم

$$\lim_{x\to 1^-} g(x)=\lim_{x\to 1^-}(3+x)=4$$

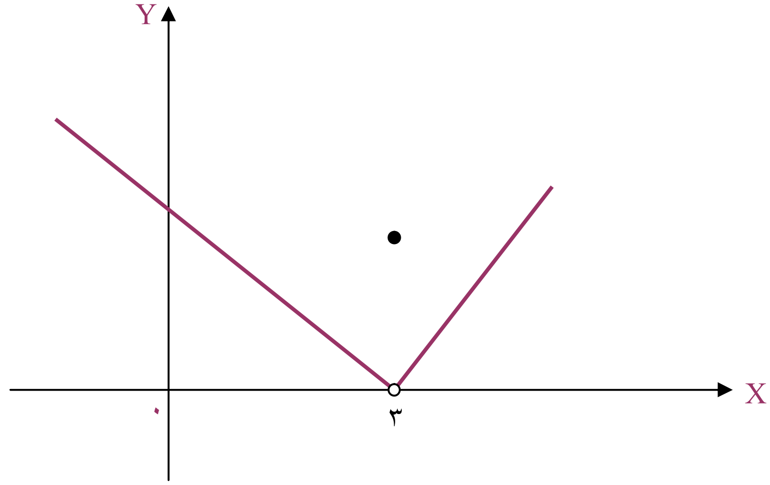
$$\lim_{x\to 1^+} g(x)=\lim_{x\to 1^+}(3-x)=2$$

چون $\lim_{x\to 1^+} g(x)\neq \lim_{x\to 1^-} g(x)$ ، نتیجه می گیریم که $\lim_{x\to 1} g(x)$ موجود نیسـت ، و بنـابراین شـرط (ii) برقرار نیست . لذا تابع g در ۱ ناپیوسته است .

c) فرض کنیم تابع h به صورت زیر تعریف شده باشد :

$$h(x)=\begin{cases}|x-3|, & x\neq 3\\ 2, & x=3\end{cases}$$

در نقطه $x=3$ سه شرط تعریف بالا را بررسی می کنیم . داریم $h(3)=2$، بنابراین شرط (i)



شکل ۲ . ۱۰

برقرار است. $\lim_{x\to 3^+}h(x)=0$ و $\lim_{x\to 3^-}h(x)=0$ بنابراین $\lim_{x\to 3}h(x)=0$ ، در نتیجه شرط (ii) برقرار است.

داریم $\lim_{x\to 3}h(x)=0$ ولی $h(3)=2$، بنابراین شرط (iii) برقرار نیست . لذا ، h در 3 ناپیوسته است .

در قسمت (a) از مثال بالا اگر $f(1)$ را برابر 5 تعریف کنیم ، آنگاه f در نقطه $x=1$ پیوسته خواهد شد . این مفهوم ناپیوستگی رفع شدنی را روشن می سازد . به طور کلی ، فرض کنیم f تابعی باشد که در نقطه a ناپیوسته بوده ، ولی برای آن $\lim_{x\to a}f(x)$ وجود داشته باشد . در این صورت یا $f(a)\neq\lim_{x\to a}f(x)$ یا اصلا $f(a)$ وجود ندارد . این ناپیوستگی یک **ناپیوستگی رفع شدنی** نامیده می شود ، زیرا اگر f را مجددا در a چنان تعریف کنیم که $f(a)=\lim_{x\to a}f(x)$ ، آنگاه f در a پیوسته خواهد شد . اگر ناپیوستگی رفع شدنی نباشد آن را یک **ناپیوستگی ذاتی (اصلی)** می نامند .

در قسمت (b) از مثال بالا چون $\lim_{x\to 1}g(x)$ موجود نیست ، پس ناپیوستگی ذاتی است .

در قسمت (c) از مثال بالا اگر $h(3)=0$ تعریف کنیم ، آنگاه $\lim_{x\to 3}h(x)=h(3)$ ، بنابراین ناپیوستگی در نقطه 3 رفع شدنی است .

مثال ۱۷: پیوستگی توابع زیر را در نقاط مورد نظر هر یک بررسی کنید :

۱) تابع $f(x)=\sin x$ در یک نقطه دلخواه x_0 .

۲) تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & , \quad x\neq 0\\ 1 & , \quad x=0\end{cases}$ در $x=0$.

۳) تابع $(x\neq 0)$ $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ در $x=0$.

۴) تابع دیریکله $D(x)=\begin{cases}1 & , \quad \text{منطق } x\\ 0 & , \quad \text{اصم } x\end{cases}$ در یک نقطه دلخواه x_0.

۵) تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|} & , \quad x\neq 0\\ 0 & , \quad x=0\end{cases}$ در $x=0$.

حل: ۱) از مثلثات می دانیم که $\sin A-\sin B=2\sin\dfrac{A-B}{2}\cos\dfrac{A+B}{2}$. نشان می دهیم که تابع $f(x)=\sin x$ در هر نقطه $x_0\in R$ پیوسته است، یعنی $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$

و به عبارت دیگر $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\ni |x-x_0|<\delta\Rightarrow|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon$.

اما داریم $|\sin x-\sin x_0|=2\left|\sin\dfrac{x-x_0}{2}\right|\left|\cos\dfrac{x+x_0}{2}\right|$

حال به سادگی دیده می شود که همواره $|\cos x|\leq 1\ ,\ 0\leq|\sin x|\leq|x|$ و بنابراین

$$|\sin x-\sin x_0|\leq 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right|=|x-x_0|$$

لذا اگر برای هر $\varepsilon>0$ما $\delta=\varepsilon$ اختیار کنیم ، آنگاه $|x-x_0|<\delta$ نتیجه می دهد که $|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon$. پس $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$ و تابع $f(x)=\sin x$ بر اعداد حقیقی R پیوسته است.

۲) از مثال ۱۳ قسمت (۳) می دانیم که $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ و چون $f(0)=1$ تعریف شده است پس $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=f(0)=1$ ، یعنی تابع $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ در $x=0$ پیوسته است.

۳) در اینجا تابع $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ در $x=0$ ناپیوسته است ، زیرا تابع در 0 تعریف نشده است . اکنون می توانیم بنویسیم $0\leq\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|=|x|\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|$و چون همواره $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leq 1$ ، پس $0\leq\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|\leq|x|$ و با استفاده از قضیه فشردگی (قضیه۹) داریم

$$0\leq\lim_{x\to 0}\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leq\lim_{x\to 0}|x|=0$$

پس $\lim\limits_{x\to 0}\left|x\sin\frac{1}{x}\right|=0$ ، و از آنجا $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$. حال اگر ما $f(0)=0$ تعریف کنیم می بینیم که $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ در $x=0$ پیوسته می شود ، بنابراین می توان گفت که نقطه $x=0$ یک نقطه ناپیوستگی رفع شدنی بوده است .

۴) در مثال ۶ دیدیم که تابع دیریکله در هیچ نقطه ای دارای حد نیست . بنابراین تابع دیریکلـه در هر نقطه ، $x_0\in R$ ناپیوسته است و این ناپیوستگی ، ناپیوستگی ذاتی است.

۵) داریم
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{-x}=\lim_{x\to 0^-}(-1)=-1$$
و
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0^+}1=1$$
لذا $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ موجود نیست و بنابراین نقطه $x=0$ یک نقطه ناپیوستگی ذاتی تابع $f(x)=\frac{x}{|x|}$ است .

قضیه های پیوستگی

از روی تعریف پیوستگی و قضیه هایی که در مورد حد توابع ثابت کـردیم ، قضـیه زیـر را در مـورد توابع پیوسته داریم.

قضیه۱۰: اگر توابع f و g در نقطه a پیوسته باشند ، آنگاه:

الف) $f+g$ در نقطه a پیوسته است .

ب) $f-g$ در نقطه a پیوسته است .

ج) fg در نقطه a پیوسته است .

د) $\frac{f}{g}$ در نقطه a پیوسته است ، هرگاه $g(a)\neq 0$.

اثبات: با توجه به قضیه هایی که در مورد حد توابع بیان و ثابت کرده ایم می توانیم بگوییم که کلیه بندهای این قضیه قبلا ثابت شده است.

مثال۱۸: (۱) یک چندجمله ای در هر عدد حقیقی پیوسته است . (۲) یک تابع منطـق در هـر نقطه از قلمرو (حوزه تعریف) خود پیوسته است.

حل: ۱) برای اثبات چندجمله ای $f(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\dots+b_{n-1}x+b_n$ ، $b_0\neq 0$ از درجه $n\geq 0$ را که در آن $b_0,b_1,\dots,b_n$ اعدادی حقیقی هستند ، درنظر می گیریم .

با کاربرد متوالی قضایای حد می توانیم نشان دهیم که اگر a عدد حقیقی دلخواهی باشد ، آنگاه

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}(b_0x^n+b_1x^{n-1}+\dots+b_{n-1}x+b_n)$$
$$=\lim_{x\to a}(b_0x^n)+\lim_{x\to a}(b_1x^{n-1})+\dots+\lim_{x\to a}(b_{n-1}x)+b_n$$
$$=b_0a^n+b_1a^{n-1}+\dots+b_{n-1}a+b_n$$

یعنی $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ و بنابراین $f(x)$ در a پیوسته است .

۲) یک تابع منطق مانند $f(x)$ به صورت خارج قسمت دو چندجمله ای تعریف می گردد ،یعنی :

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\dots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\dots+b_{n-1}x+b_n},a_0,b_0\neq 0$$

قلمرو(حوزه تعریف) تابع منطق f عبارت است از $Df=R-\{a\in R|h(a)=0\}$.

اگر x_0 نقطه ای در قلمرو تابع f باشد ، آنگاه $h(x_0)\neq 0$ و بنابراین با توجه به قضیه۷

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} h(x)}$$

چون g و h چندجمله ای هستند ، بنابر قسمت (۱) در x_0 پیوسته هستند و بنابراین

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0) \text{ و } \lim_{x\to x_0} h(x)=h(x_0)$$

در نتیجه $\lim_{x\to x_0} f(x)=\frac{g(a)}{h(a)}=f(a)$ و می بینیم که تابع f در هر نقطه از قلمرو خود پیوسته است .

اکنون قضیه بسیار مفیدی را بیان و ثابت می کنیم که کاربردهای فراوانی در رابطه با توابع پیوسته دارد.

قضیه۱۱: اگر $\lim_{x\to a} g(x)=b$ و تابع f در نقطه b پیوسته باشد ، آنگاه $\lim_{x\to a}(fog)(x)=f(b)$ یعنی $\lim_{x\to a} f(g(x))=f(\lim_{x\to a} g(x))$.

اثبات: چون تابع f در b پیوسته است ، حکم زیر را داریم: برای هر $\varepsilon_1>0$ ،عددی مانند $\delta_1>0$ وجود دارد ، به طوری که

اگر $|y-b|<\delta_1$ ، آنگاه $|f(y)-f(b)|<\varepsilon_1$ (۱)

از آنجایی که $\lim_{x\to a} g(x)=b$ ، برای هر $\delta_1>0$ عددی مانند $\delta_2>0$ وجود دارد ، به طوری که

اگر $0<|x-a|<\delta_2$ ، آنگاه $|g(x)-b|<\delta_1$. (۲)

توجه می کنیم که هر وقت $0<|x-a|<\delta_2$ ، می توانیم در (۱) به جای y مقدار $g(x)$ را قرار داده و حکم زیر را به دست آوریم: برای هر $\varepsilon_1>0$ عددی مانند $\delta_1>0$ وجود دارد ،به طوری که اگر $|g(x)-b|<\delta_1$ ، آنگاه $|f(g(x))-f(b)|<\varepsilon_1$. (۳)

اکنون از (۲) و (۳) نتیجه می گیریم که برای هر $\varepsilon_1>0$ عددی مانند $\delta_2>0$ وجود دارد ، به طوری که اگر $0<|x-a|<\delta_2$ ، آنگاه $|f(g(x))-f(b)|<\varepsilon_1$، که از آن به دست می آوریم $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=f(b)$ ، یعنی $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=f(\lim\limits_{x\to a} g(x))$.

یک کاربرد فوری از قضیه ۱۱ اثبات قضیه ۸ است که پس از بیان و اثبات قضیه ۱۲ به آن می پردازیم.

قضیه۱۲: اگر n یک عدد طبیعی باشد ، آنگاه برای تابع $f(x)=\sqrt[n]{x}$ ، داریم

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}$$

الف) برای حالتی که a عددی مثبت است .

ب) برای حالتی که a عددی منفی یا صفر است و n فرد است .

اثبات: ما قسمت(الف)را ثابت می کنیم و قسمت (ب)را به عنوان تمرین به متعلمین واگذارمی نماییم

فرض می کنیم a عددی مثبت باشد و بنابر تعریف حد تابع بایستی نشان دهیم که به ازای هر $\varepsilon>0$، عددی مانند $\delta>0$ وجود دارد ، به طوری که اگر $0<|x-a|<\delta$ ، آنگاه $\left|\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}\right|<\varepsilon$.

اما می توانیم بنویسیم

$$\left|\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}\right|=\left|\frac{(x^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n}})\left[(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}+(x^{\frac{1}{n}})^{n-2}a^{\frac{1}{n}}+\ldots+x^{\frac{1}{n}}(a^{\frac{1}{n}})^{n-2}+(a^{\frac{1}{n}})^{n-1}\right]}{(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}+(x^{\frac{1}{n}})^{n-2}a^{\frac{1}{n}}+\ldots+x^{\frac{1}{n}}(a^{\frac{1}{n}})^{n-2}+(a^{\frac{1}{n}})^{n-1}}\right|$$

و با استفاده از اتحاد $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

داریم

$$\left|\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}\right|=|x-a|.\frac{1}{\left|x^{\frac{n-1}{n}}+x^{\frac{n-2}{n}}a^{\frac{1}{n}}+\ldots+x^{\frac{1}{n}}a^{\frac{n-2}{n}}+a^{\frac{n-1}{n}}\right|}$$

اکنون کران بالایی برای کسر طرف راست تساوی فوق پیدا می کنیم . از ابتدا فرض می کنیم که $\delta\le a$ و بنابراین هر وقت $|x-a|<\delta$ ، می دانیم که $|x-a|<a$ ، و این معادل است با

$$-a<x-a<a\Leftrightarrow 0<x<2a$$

بنابراین ، اگر $|x-a|<a$ ، آنگاه $x>0$ ، پس داریم

$$\left|\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}\right|<|x-a|.\frac{1}{0+0+\ldots+0+a^{\frac{n-1}{n}}}=|x-a|.\frac{1}{a^{\frac{n-1}{n}}}$$

می خواهیم $|x-a|.\frac{1}{a^{\frac{n-1}{n}}}<\varepsilon$ ، یعنی $|x-a|<a^{\frac{n-1}{n}}.\varepsilon$. بنابراین اگر $\delta=\min\left\{a,a^{\frac{n-1}{n}}\varepsilon\right\}$ اختیار شود آنگاه برای $|x-a|<\delta$ داریم

$$\left|\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}\right|=|x-a|.\frac{1}{\left|x^{\frac{n-1}{n}}+x^{\frac{n-2}{2}}a^{\frac{1}{n}}+\ldots+x^{\frac{1}{n}}a^{\frac{n-2}{n}}+a^{\frac{n-1}{n}}\right|}<a^{\frac{n-1}{n}}\varepsilon.\frac{1}{a^{\frac{n-1}{n}}}=\varepsilon$$

ولذا ثابت کرده ایم که $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}$.

اکنون قضیه ۸ را برای اثبات مجدد بیان می کنیم

قضیه ۸: اگر $\lim_{x\to a}f(x)=L$ ، آنگاه $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{L}$
در حالتی که $L>0$ ، n عددی طبیعی است ، یا $L\leq 0$ و n عددی فرد طبیعی است.

اثبات: فرض کنیم تابع h با ضابطه $h(x)=\sqrt[n]{x}$ تعریف شده باشد . در این صورت تابع مرکب hof به صورت $h(f(x))=\sqrt[n]{f(x)}$ تعریف می گردد . از قضیه ۱۲ نتیجه می شود که h در L پیوسته است ، هرگاه $L>0$ و n عددی طبیعی باشد یا اگر $L\leq 0$ و n عدد طبیعی فردی باشد .
بنابراین ، داریم

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\lim_{x\to a}h(f(x))=h(\lim_{x\to a}f(x))$$
$$=h(L)=\sqrt[n]{L}$$

مثال ۱۹:

۱) با استفاده از قضیه ۱۱ و نه قضیه ۷ قسمت (b) ، این حد را پیدا کنید: $\lim_{x\to 2}\frac{4x-3}{x^2+2x+5}$

۲) با استفاده از قضیه ۱۱ و نه قضیه ۸ این حد را پیدا کنید:

$$\lim_{x\to 7}\sqrt[4]{3x-5}$$

حل: ۱) فرض کنیم توابع f و g به صورت زیر تعریف شده باشند :

$$f(x)=4x-3\qquad,\quad g(x)=x^2+2x+5$$

ما کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ را به عنوان حاصل ضرب $f(x)$ و $\frac{1}{g(x)}$ درنظر می گیریم و قضیه ۶ را به کار می بریم. اما قبل از هر کار ، بایستی $\lim_{x\to 2}\frac{1}{g(x)}$ را پیدا کنیم و برای این کار $\frac{1}{g(x)}$ را به عنوان مقدار

یک تابع مرکب درنظر می گیریم . اگر h تابعی باشد که با $h(x)=\frac{1}{x}$ تعریف شده است ، آنگاه تابع مرکب hog تابعی است که با $h(g(x))=\frac{1}{g(x)}$ تعریف می گردد . اکنون

$$\lim_{x\to 2} g(x)=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+5)=13$$

برای استفاده از قضیه ۱۱ ،تابع h بایستی در 13 پیوسته باشد و این با استفاده از قسمت(الف) قضیه۷ بدیهی است . در این صورت داریم

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2+2x+5}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{g(x)}=\lim_{x\to 2}h(g(x))=$$

$$h(\lim_{x\to 2}g(x))=h(13)=\frac{1}{13}$$ (با استفاده از قضیه ۱۱)

بنابراین، با استفاده از قضیه ۶ به دست می آوریم

$$\lim_{x\to 2}\frac{4x-3}{x^2+2x+5}=\lim_{x\to 2}(4x-3).\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2+2x+5}=5.\frac{1}{13}=\frac{5}{13}$$

۲)فرض کنیم توابع f و h به صورت زیر تعریف شده باشند :

$$f(x)=3x-5 \qquad , \quad h(x)=\sqrt[4]{x}$$

تابع مرکب hof با $h(f(x))=\sqrt[4]{3x-5}$ تعریف می شود .

داریم $\lim_{x\to 7}f(x)=\lim_{x\to 7}(3x-5)=16$ ، بنابراین ، برای استفاده از قضیه ۱۱ در مورد تابع مرکب hof ، تابع h بایستی در 16 پیوسته باشد، که این از قضیه ۱۲ نتیجه می شود . پاسخ ، پس از آن ، به صورت زیر است

$$\lim_{x\to 7}\sqrt[4]{3x-5}=\lim_{x\to 7}h(f(x))=h(\lim_{x\to 7}f(x))$$ (با استفاده از قضیه ۱۱)

$$=h(16)=\sqrt[4]{16}=2$$

نتیجه: اگر تابع g در نقطه a و تابع f در نقطه $g(a)$ پیوسته باشد ، آنگاه تابع مرکب fog در نقطه a پیوسته است.

اثبات: از آنجایی که g در نقطه a پیوسته است ، داریم $\lim_{x\to a}g(x)=g(a)$. اکنون f در نقطه $g(a)$ پیوسته است ، بنابراین می توانیم قضیه۱۱ را برای تابع مرکب fog به کار بریم ، که از آنجا به دست می آوریم

$$\lim_{x\to a}(fog)(x)=\lim_{x\to a}f(g(x))=f(\lim_{x\to a}g(x))=f(g(a))=(fog)(a)$$

واین ثابت می کند که تابع مرکب fog در نقطه a پیوسته است .

نتیجه بالا این توانایی را به ما می دهد که نقاط پیوستگی توابع خاصی را پیدا کنیم . لطفا به مثال زیر توجه کنید

مثال۲۰: تابع h با ضابطه $h(x)=\sqrt{4-x^2}$ مفروض است. مقادیری از x را پیدا کنید که در آنها h پیوسته است.

حل: اگر $g(x)=4-x^2$ و $f(x)=\sqrt{x}$ ، آنگاه $h(x)=(fog)(x)$. چون g یک چندجمله ای است ، در همه جا پیوسته است . به علاوه ، f در هر عدد مثبت پیوسته است.
لذا بنابر نتیجه بالا ، تابع h در هر x که برای آن $g(x)>0$ ، یعنی $4-x^2>0$ ، پیوسته است.
بنابراین h در هر نقطه از فاصله باز $(-2,2)$ پیوسته است .

نکته: فرض کنیم f در نقطه x_0 پیوسته و در یک همسایگی آن مثبت باشد ، در این صورت

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{f(x_0)}$$

راهنمایی: ابتدا نشان دهید که از مثبت بودن f در یک همسایگی نقطه x_0 می توانیم نتیجه بگیریم $f(x_0)\ge 0$. سپس از قضیه ۸ استفاده کنید .

مثال ۲۱: پیوستگی توابع زیر را بررسی کنید:

(a $\quad (x\ge 0) \qquad f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{x^n+1}$ $\qquad$ (b $f(x)=\lim_{n\to\infty}\cos^{2n}x$.

حل: (a برای $0\le x<1$ ، $\lim_{n\to\infty}x^n=0$ و برای $x=1$ ، $\lim_{n\to\infty}x^n=1$. اگر $x>1$, آنگاه $\lim_{n\to\infty}x^n=+\infty$ یعنی حد موجود نیست .

پس می توان تابع $f(x)$ را بدین صورت نوشت:

$$f(x)=\begin{cases}1 & , \quad 0\le x<1\\ \dfrac{1}{2} & , \quad x=1\\ 0 & , \quad x>1\end{cases}$$

داریم $\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}1=1$ و $\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}0=0$ ، پس $\lim_{x\to 1}f(x)$ وجود ندارد و تابع $f(x)$ در $x=1$ ناپیوسته است.

(b اگر $x\ne k\pi$, آنگاه $-1<\cos x<1$ و بنابراین $0\le\cos^{2n}x<1$. در نتیجه

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\cos^{2n}x=0$$

اگر $x=k\pi$ ، آنگاه $\cos x=\pm 1$ و بنابراین $\cos^{2n}x=1$ و در نتیجه

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\cos^{2n}x=1$$

پس می توان تابع $f(x)$ را به صورت زیر نوشت:

$$f(x)=\begin{cases}0 & , \quad x\neq k\pi\\ 1 & , \quad x=k\pi\end{cases}$$

از اینجا به سادگی دیده می شود که تابع $f(x)$ در $(k=0,\pm1,...)$ ، $x=k\pi$ ناپیوسته است .

مثال۲۲: فرض کنیم f تابعی باشد که حوزه تعریف آن R است . فرض کنیم(i) f در نقطه 0 پیوسته باشد، (ii) برای هر $a,b\in R$ ، $f(a+b)=f(a).f(b)$. نشان دهید که تابع f در هر عدد حقیقی پیوسته است.

حل: با توجه به (ii) داریم $f(0)=f(0+0)=f(0).f(0)$, پس $f(0)(1-f(0))=0$ و بنابراین $f(0)=0$ یا $f(0)=1$. دو حالت در نظر می گیریم

حالت اول $f(0)=0$. اگر $x\in R$ عددحقیقی دلخواهی باشد ، آنگاه با توجه به (ii) داریم

$$f(x)=f(x+0)=f(x).f(0)=f(x).0=0$$

یعنی $f(x)=0$. پس در این حالت تابع $f(x)$ یک تابع ثابت است و بنابراین در همه جا پیوسته است.

حالت دوم $f(0)=1$. فرض کنیم $x_0\in R$ عدد حقیقی دلخواهی باشد و $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ را بررسی می کنیم. اگر $x-x_0=\Delta x$ بگیریم ، آنگاه $x\to x_0 \Leftrightarrow \Delta x\to 0$ و بنابراین

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0)\,f(\Delta x)$$

$= f(x_0)\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\Delta x)$ (از شرط (ii) استفاده کرده ایم)

$= f(x_0)\times f(0)$ (از شرط (i) استفاده کرده ایم) $= f(x_0)\times 1= f(x_0)$

پس $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ ، یعنی تابع $f(x)$ در x_0 پیوسته است .

مثال ۲۳: فرض کنیم

$$f(x)=\begin{cases}-2\sin x & , \quad x\leq \dfrac{-\pi}{2}\\ A\sin x+B & , \quad \dfrac{-\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\\ \cos x & , \quad x\geq \dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

اعداد A و B را چنان تعیین کنید که $f(x)$ در همه جا پیوسته باشد .

حل: در مثال ۱۷ قسمت (۱) دیدیم که تابع $f(x)=\sin x$ بر R پیوسته است . به طریق مشابه می توان نشان داد که تابع $f(x)=\cos x$ بر R پیوسته است . بنابراین ، بایستی دقت خود را معطوف به نقاطی بکنیم که در آنها ضابطه تابع عوض می شود ، یعنی اگر شرایط را چنان تعیین کنیم که تابع $f(x)$ در این نقاط هم پیوسته باشند ، آنگاه $f(x)$ روی R پیوسته خواهد شد. می نویسیم

$$\lim_{x\to \frac{-\pi}{2}^-} f(x)=\lim_{x\to \frac{-\pi}{2}^+} f(x)$$

که معادل است با

$$\lim_{x\to \frac{-\pi}{2}^-}(-2\sin x)=\lim_{x\to \frac{-\pi}{2}^+}(A\sin x+B)$$

یا

$$2=-A+B \qquad (۱)$$

همچنین می نویسیم

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x)$$

که معادل است با

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}(A\sin x+B)=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\cos x$$

یا

$$A+B=0 \qquad (۲)$$

و از حل دستگاه $\begin{cases}-A+B=2\\ A+B=0\end{cases}$ به دست می آوریم $B=1$ ، $A=-1$.

پیوستگی راست و چپ

بار دیگر به تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ توجه می کنیم . می دانیم که f در بازه باز $(-2,2)$ پیوسته است . اما ، به دلیل آنکه f در هیچ بازه باز شامل -2 یا 2 تعریف نشده است ، نمی توانیم حدود $\lim_{x\to -2} f(x)$ یا $\lim_{x\to 2} f(x)$ را بررسی نماییم . بنابراین ، برای بحث در مورد پیوستگی f در بازه بسته $[-2,2]$ ، بایستی مفهوم پیوستگی را گسترش دهیم ، به طوری که شامل پیوستگی در نقاط انتهایی یک بازه بسته بشود . برای این کار ابتدا پیوستگی راست و پیوستگی چپ را تعریف می کنیم.

تعریف: گوییم تابع f در نقطه a از **راست پیوسته** است ، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

الف) $f(a)$ موجود باشد ،
ب) $\lim_{x\to a^+} f(x)$ موجود باشد ،
ج) $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$.

تعریف: گوییم تابع f در نقطه a از **چپ پیوسته** است هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

الف) $f(a)$ موجود باشد ،

ب) $\lim_{x\to a^-} f(x)$ موجود باشد ،

ج) $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

تعریف: گوییم تابع f **در بازه بسته** $[a,b]$ **پیوسته** است ، هرگاه f در بازه باز (a,b) پیوسته بوده ، در نقطه a از راست و در نقطه b از چپ پیوسته باشد . به عبارت دیگر:

۱) برای هر $x_0 \in (a,b)$، $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ،

۲) $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

۳) $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

تبصره: به روش مشابهی می توان پیوستگی در بازه های $(a,b]$ و $[a,b)$ و $[a,+\infty)$ و $(-\infty,b]$را نیز تعریف کرد.

مثال۲۵:

۱)تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt{\dfrac{2-x}{3+x}}$ داده شده است ، نقاط پیوستگی تابع را پیدا کنید .

۲)آیا تابع $f(x)=\begin{cases}2x & , & 0\le x\le 1\\ 2-x & , & 1<x\le 2\end{cases}$ در هر نقطه از فاصله $[0,2]$ پیوسته است؟

درباره تابع $g(x)=\begin{cases}x^2 & , & 0\le x\le 1\\ 2-x & , & 1<x\le 2\end{cases}$ وضع چگونه است؟

۳)مثالی از یک تابع ارایه دهید که تنها در یک نقطه پیوسته باشد.

حل: ۱) ابتدا قلمرو (دامنه) تابع را تعیین می کنیم . قلمرو تابع f مجموعه تمام نقاطی است که برای آنها $\dfrac{2-x}{3+x}$ نامنفی باشد. به جدول زیر توجه کنید:

x	$-\infty$ تا -3	-3 تا 2	2 تا $+\infty$
$2-x$	+	+	−
$3+x$	−	+	+
$\frac{2-x}{3+x}$	−	+	−
$f(x)$	وجود ندارد	+	وجود ندارد

وجود ندارد

بنابراین ، قلمرو تابع ، بازه باز بسته $(-3,2]$ است. تابع f در بازه باز $(-3,2)$ پیوسته است. این تابع از چپ در 2 پیوسته است ، زیرا

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\sqrt{\frac{2-x}{3+x}} = 0 = f(2)$$

اما تابع f در -3 از راست پیوسته نیست ، زیرا این تابع در -3 تعریف نشده است .

نتیجه می گیریم که تابع f در $(-3,2]$ پیوسته است .

۲)داریم $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(2-x) = 1$ و $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x = 2$

و $f(1) = 2$ ، پس $\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$ یعنی تابع f در ۱ فقط از چپ پیوسته است.

همچنین

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(2-x) = 0 = f(2)$$

و

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x = 0 = f(0)$$

پس تابع f در بازه های $[0,1]$ و $(1,2]$ پیوسته است . برای تابع g داریم

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1 = g(1)$$

و

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+}(2-x) = 1 = g(1)$$

پس g در $x=1$ پیوسته است . نیز

$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-}(2-x) = 0 = g(2) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0 = g(0)$$

بنابراین ، تابع g در $[0,2]$ پیوسته است .

۳)تابع f با ضابطه زیر را درنظر می گیریم :

$$f(x) = \begin{cases} x\ , & \text{منطق } x \\ -x\ , & \text{اصم } x \end{cases}$$

چون 0 عددی منطق است ، پس $f(0)=0$ ، و بسادگی می توان نشان داد که $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ ،پس تابع f در $x=0$ پیوسته است . حال نشان می دهیم که اگر $x_0 \neq 0$ ، آنگاه تابع f در x_0 ناپیوسته است .فرض کنیم $x_0>0$ یک عدد منطق باشد و تابع f در x_0 پیوسته باشد (فرض خلف) ، یعنی $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. پس

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$$

حال $\varepsilon = \frac{x_0}{2} > 0$ اختیار می کنیم و عدد طبیعی n را آن قدر بزرگ می گیریم که عدد اصم $x = x_0 + \frac{\sqrt{2}}{n}$ در نامساوی $|x-x_0|<\delta$ صدق کند ، بنابراین داریم

$$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| -(x_0+\frac{\sqrt{2}}{n}) - x_0 \right| < \frac{x_0}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left| 2x_0 + \frac{\sqrt{2}}{n} \right| < \frac{x_0}{2} \Leftrightarrow 2x_0 + \frac{\sqrt{2}}{n} < \frac{x_0}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2}x_0 + \frac{\sqrt{2}}{n} < 0$$

که یک تناقض است . بنابراین f در x_0 ناپیوسته است . روش مشابهی را می توان برای عدد منطق $x_0<0$ و هر عدد اصم دیگر به کار برد . تابع f تنها در $x=0$ پیوسته خواهد بود و در بقیه نقاط ناپیوسته است.

مثال۲۶: پیوستگی توابع زیر را بررسی کنید:

۱) $f(x) = \dfrac{2x^5 - 8x^2 + 11}{x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4}$

۲) $f(x) = \dfrac{3\sin^3 x + \cos^2 x + 1}{4\cos x - 2}$

۳) $f(x) = \dfrac{x^3 \cos x + x^2 \sin x}{\cos(\frac{1}{\sin x})}$.

حل: ۱) چون صورت و مخرج کسر چندجمله ای هستند ، $f(x)$ تنها در نقاطی ناپیوسته است که مخرج کسر صفر گردد . اما داریم $x^4+4x^3+8x^2+8x+4=(x^2+2x+2)^2$
و چون برای هر x ، $x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0$ ، مخرج کسر هرگز صفر نمی شود . بنابراین تابع $f(x)$ برسرتاسر اعداد حقیقی R پیوسته است .

۲)تابع $f(x)$ تنها در نقاطی که مخرج صفر است ناپیوسته می باشد ، یعنی نقاطی که ریشه های معادله $4\cos x - 2 = 0$ یا $\cos x = \frac{1}{2}$ هستند . اما از حل این معادله به دست می آوریم :

$$x = x_n = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

بنابراین ، تابع $f(x)$ ، به غیر از نقاط x_n ، در همه جا پیوسته است .

۳)مانند قسمت(۲) ، صورت بر سرتاسر اعداد حقیقی R پیوسته است . اما در مورد مخرج ، بنابر نتیجه بعد از مثال ۱۹ برای پیوستگی توابع مرکب ، این تابع در نقاطی پیوسته است که در آن تابع $u=\dfrac{1}{\sin x}$ پیوسته باشد ، زیرا تابع $\cos u$ همه جا پیوسته است . بنابراین ، مخرج همه جا پیوسته است ، بجز در نقاط (kعدد صحیح) $x=k\pi$.

به علاوه ، بایستی نقاطی را که در آنها $\cos(\dfrac{1}{\sin x})=0$ از بحث خارج کنیم ، یعنی نقاطی که در آنها (p عدد صحیح) $\dfrac{1}{\sin x}=(2p+1)\dfrac{\pi}{2}$ ، یا $\sin x=\dfrac{2}{[(2p+1)\pi]}$.

بنابراین ، تابع $f(x)$ در همه جا پیوسته است بجز در نقاط

$$x=(-1)^n arc\sin\frac{2}{(2p+1)\pi}+n\pi, \qquad x=k\pi(k,p,n=0,\pm1,\pm2,...).$$

مثال۲۷:

۱)پیوستگی توابع زیر را بررسی کنید: $y=f(x)=\cos(x^n)$ ، که در آن n عددی طبیعی است و $y=f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{2}-\cos^2 x}$.

۲)برای تابع $y=f(u)=\dfrac{1}{u^2+u-2}$ ، که در آن $u=\dfrac{1}{x-1}$ ، نقاط ناپیوستگی را پیدا کنید.

۳)تابع $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ مفروض است . نقاط ناپیوستگی تابع مرکب $y=f\{f[f(x)]\}$ را پیداکنید.

حل: ۱) ما تابع مرکب $y=\cos u$ را داریم ، که در آن $u=x^n$. تابع $y=\cos u$ در هر نقطه u پیوسته است ، و تابع $u=x^n$ برای هر مقدار x پیوسته است.بنابراین ، تابع $y=\cos(x^n)$ بر سرتاسر اعداد حقیقی R پیوسته است. و اما برای دومین تابع ، در اینجا $y=\sqrt{\dfrac{1}{2}-u^2}$ که در آن $u=\cos x$. تابع $\sqrt{\dfrac{1}{2}-u^2}$ بر بازه $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ تعریف شده و پیوسته است ، تابع $u=\cos x$ همه جا پیوسته است .

بنابراین ، تابع $y=\sqrt{\dfrac{1}{2}-\cos^2 x}$ در تمامی x هایی که برای آنها $|\cos x|\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

یعنی

$$\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}+2\pi n\le x\le\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n\\ \dfrac{5\pi}{4}+2\pi n\le x\le\dfrac{7\pi}{4}+2\pi n\end{cases}$$

پیوسته است .

۲)تابع $u=\varepsilon(x)=\dfrac{1}{x-1}$ در نقطه $x=1$ ناپیوسته است . تابع $y=f(u)=\dfrac{1}{u^2+u-2}$ در نقاطی که برای آنها $u^2+u-2=0$ ، یعنی $u_1=-2$ و $u_2=1$ ناپیوسته است .

با استفاده از این مقادیر u ، مقادیر متناظر برای x را از حل معادلات $1=\frac{1}{x-1}$ و $-2=\frac{1}{x-1}$ پیدا می کنیم و به دست می آوریم، $x=2, x=\frac{1}{2}$.

بنابراین تابع مرکب در سه نقطه ناپیوسته است، $x_1=\frac{1}{2}, x_2=1, x_3=2$.

۳)نقطه $x=1$ نقطه ناپیوستگی تابع $u=f(x)=\frac{1}{1-x}$ است.

اگر $x\neq 1$ ، آنگاه

$$u=f[f(x)]=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{x-1}{x}$$

بنابراین، نقطه $x=0$ یک ناپیوستگی تابع $u=f[f(x)]$ است.

اگر $x\neq 0$ ، $x\neq 1$ ، آنگاه $y=f\{f[f(x)]\}=\frac{1}{1-\frac{x-1}{x}}=x$ در همه جا پیوسته است . بنابراین نقاط ناپیوستگی این تابع مرکب عبارتند از $x=1, x=0$.

مثال۲۸:

۱)مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع f با ضابطه زیر در فاصله $(-\infty,+\infty)$ پیوسته باشد :

$$f(x)=\begin{cases}3x+6 & , \quad x<-3\\ 3ax-7b & , \quad -3\leq x\leq 3\\ x-12b & , \quad 3<x\end{cases}$$

۲)تابع f به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & , \quad x\leq c\\ ax+b & , \quad x>c\end{cases}$$

که در آن a و b و c اعدادی ثابت هستند . اگر b و c داده شده باشند ، پیدا کنید تمام مقادیری را که a در صورت وجود ، می تواند اختیار کند ، به طوری که f در نقطه $x=c$ پیوسته باشد .

حل: ۱) برای تعیین مقادیر a و b شرایطی را می نویسیم که تابع f در نقاطی که ضابطه اش عوض می شود ، پیوسته باشد.

$$\lim_{x\to -3^-} f(x)=\lim_{x\to -3^-}(3x+6a)=-9+6a$$
$$\lim_{x\to -3^+} f(x)=\lim_{x\to -3^+}(3ax-7b)=-9a-7b=f(-3)$$

حال قرار می دهیم $-9+6a=-9a-7b$، یعنی $15a+7b=9$. همچنین

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}(3ax-7b)=9a-7b=f(3)$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}(x-12b)=3-12b$$

حال قرار می دهیم $9a-7b=3-12b$ ، یعنی $9a+5b=3$. اکنون از دستگاه

$$\begin{cases}15a+7b=9\\ 9a+5b=3\end{cases}$$

بدست می آوریم $b=-3$ و $a=2$ و بنابراین ، با انتخاب این مقادیر برای a و b تابع $f(x)$ برسرتاسر R پیوسته است .

۲)داریم

$$\lim_{x\to c^-} f(x)=\lim_{x\to c^-}\sin x=\sin c=f(c)$$

$$\lim_{x\to c^+} f(x)=\lim_{x\to c^+}(ax+b)=ac+b$$

اکنون قرار می دهیم $\sin c=ac+b$ ، پس اگر $c\neq 0$ ، آنگاه $a=\dfrac{\sin c-b}{c}$.

اگر $c=0$ ، جوابی به دست نمی آید ، مگر آنکه $b=0$ ، که در این حالت a هر مقدار دلخواهی می تواند باشد .

مثال۲۹: قسمت(۲) از مثال ۲۸ را برای تابع f که به صورت زیر تعریف شده است ، حل کنید

$$f(x)=\begin{cases}2\cos x &, \quad x\le c\\ ax^2+b &, \quad x>c\end{cases}$$

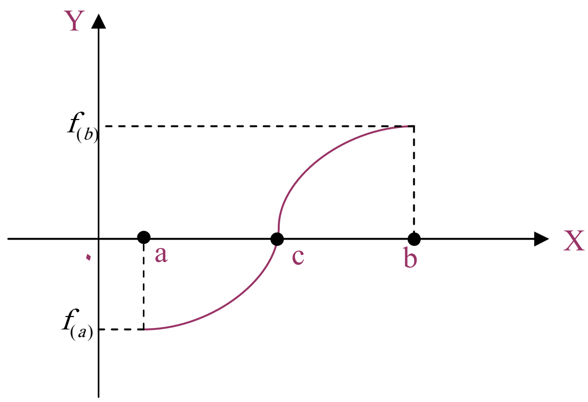
حل: (راهنمایی) به دست می آوریم $a=\dfrac{2\cos c-b}{c^2}$ ، هرگاه $c\neq 0$. اگر $c=0$ ، جوابی به دست نمی آید ،مگر آنکه $b=2$، که در این حالت a هر مقدار دلخواهی می تواند باشد.

۲ . ۶ قضیه های مهم پیوستگی و کاربردها

اکنون به بیان دو قضیه بسیار مهم می پردازیم که در حساب دیفرانسیل و انتگرال کاربردهای فراوانی دارند.

قضیه ۱۳(الف): فرض کنیم تابع f بر بازه بسته $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a).f(b)<0$ ، یعنی $f(a)$ و $f(b)$ مختلف العلامه باشند . در این صورت نقطه ای مانند $c\in(a,b)$ وجود دارد، به طوری که $f(c)=0$.

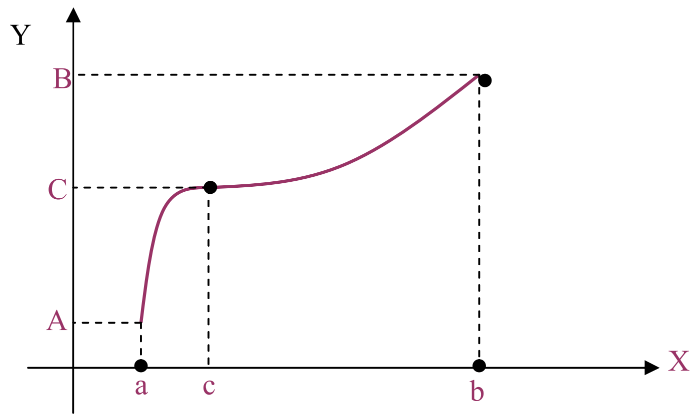
تعبیر هندسی : قضیه ۱۳ الف) بیان می کند که گراف تابع پیوسته f بر بازه بسته $[a,b]$ بایستی محور X ها را در نقطه ای بین a و b قطع کند ، هرگاه $f(a)$ و $f(b)$ دارای علامت های مختلف باشند.



شکل ۲ .۱۱

قضیه۱۳(ب)(قضیه مقدار میانی): فرض کنیم تابع f بر بازه بسته $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)=A$ و $f(b)=B$. به علاوه ، فرض کنیم که C عددی بین A و B باشد . در این صورت نقطه ای مانند c در فاصله $[a,b]$ وجود دارد ، به طوری که $f(c)=C$.

تعبیر هندسی: قضیه مقدار میانی بیان می کند که گراف تابع پیوسته f بر بازه بسته $[a,b]$ که دو نقطه (a,A) و (b,B) را به هم وصل می کند هر خط $y=C$ را ، که $A<C<B$ ، قطع می کند .



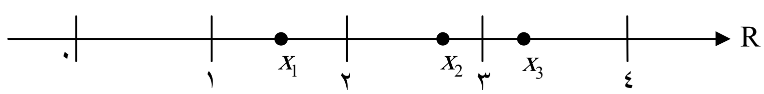
شکل ۲ .۱۲

مثال۳۰: تابع

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+(x-1)(x-2)(x-4)$$
$$+(x-1)(x-3)(x-4)+(x-2)(x-3)(x-4)$$

را در نظر می گیریم . نشان دهید که معادله $f(x)=0$ دارای سه ریشه است و حدود ریشه ها را تعیین کنید.

حل: داریم: $f(1)=-6<0$ و $f(2)=2>0$ ، چون تابع $f(x)$ بر R پیوسته است ، پس بر $[1,2]$ هم پیوسته است و بنابراین نقطه ای مانند $x_1\in(1,2)$ وجود دارد به طوری که $f(x_1)=0$. همین طور $f(3)=-2<0$ و تابع $f(x)$ بر $[2,3]$ پیوسته است . بنابراین ، نقطه ای مانند $x_2\in(2,3)$ وجود دارد ، به طوری که $f(x_2)=0$. بالاخره $f(4)=6>0$ و بنابراین با توجه به پیوستگی تابع بر $[3,4]$ نقطه ای مانند $x_3\in(3,4)$ وجود دارد ، به طوری که $f(x_3)=0$.



شکل ۲ .۱۳

مثال۳۱: نشان دهید که خط $y=\dfrac{a+b}{2}$ ، نمودار تابع $f(x)=(x-a)(x-b)+x$ را قطع می کند

حل: چون تابع f یک چندجمله ای است پس بر $[a,b]$ پیوسته است (فرض کرده ایم که $a<b$)، حال $f(b)=(b-a)(b-b)+b=b$ و $f(a)=(a-a)(a-b)+a=a$ و چون

$a<\frac{a+b}{2}<b$ ، پس $h=\frac{a+b}{2}$ بین دو عدد $f(a)=a$ و $f(b)=b$ است و لذا بنابر قضیه مقدار میانی نقطه ای مانند c در $[a,b]$ وجود دارد ، به طوری که $f(c)=h$ ، یعنی نمودار تابع $f(x)$ خط $y=\frac{a+b}{2}$ را قطع می کند .

مثال۳۲: فرض کنیم تابع $y=f(x)$ بر بازه بسته $[a,b]$ تعریف شده و برد (حوزه مقادیر) آن هم بازه بسته $[a,b]$ باشد . ثابت کنید بر این بازه بسته لااقل یک نقطه مانند x_0 وجود دارد ، به طوری که $f(x_0)=x_0$.

حل: اگر $f(a)=a$ یا $f(b)=b$ ، که اثبات تمام است . پس فرض کنیم که $f(a)\neq a$ و $f(b)\neq b$ و با توجه به اینکه برد تابع همان بازه بسته $[a,b]$ است می باید داشته باشیم $f(a)>a$ و $f(b)<b$.

اکنون تابع $g(x)$ را چنین تعریف می کنیم: $g(x)=f(x)-x$. بدیهی است که $g(x)$ بر $[a,b]$ پیوسته است و $g(b)=f(b)-b<0$ و $g(a)=f(a)-a>0$. پس بنابر قضیه ۱۳(الف) نقطه ای مانند $x_0\in(a,b)$ وجود دارد ، به طوری که $g(x_0)=0$. بنابراین $f(x_0)-x_0=0$ که از آن نتیجه می شود : $f(x_0)=x_0$.

مثال۳۳: نشان دهید که تابع $f(x)=x^3-4x$ در تمام نقاط بازه $(0,2)$منفی است .

حل: ابتدا ریشه های معادله $f(x)=0$ را به دست می آوریم:

$$f(x)=0\Leftrightarrow x^3-4x=0\Leftrightarrow x(x^2-4)=0\Leftrightarrow x(x-2)(x+2)=0$$

پس ریشه های معادله عبارتند از $x=0$ و $x=+2$ و $x=-2$.

می بینیم که به ازای مثلا $x=1$ ، $f(1)=-3<0$. پس نقاطی در $(0,2)$ هستند که در آنها تابع منفی است . حال می خواهیم نشان دهیم که برای هر نقطه از $(0,2)$، تابع $f(x)$ منفی است . فرض کنیم چنین نباشد . پس می توان دو نقطه مانند a و b متعلق به $(0,2)$ یافت ، به طوری که $f(a)>0$ و $f(b)<0$

اما اکنون بنابر قضیه۱۳ (الف) نقطه ای مانند $x_0\in(0,2)$ وجود دارد ، به طوری که $f(x_0)=0$ و این ممکن نیست ، زیرا کلیه ریشه های $f(x)=0$ را قبلا محاسبه کرده ایم. پس تابع $f(x)$ در $(0,2)$ همواره منفی است.

مثال۳۴:

۱)ثابت کنید که معادله $f(x)=x^8+8x^6-5x^4-3=0$ حداقل دو ریشه قرینه دارد .

۲)نشان دهید که معادله $x = a\sin x + b$ ، که در آن $0 < a < 1$ و $b > 0$ ، لااقل دارای یک ریشه مثبت است که کوچکتر یا مساوی $a+b$ می باشد.

۳)به ازای چه مقادیری از m یکی از ریشه های معادله

$$f(x) = x^2 - (m+1)x + 2m - 3 = 0$$

بین دو عدد 1 و -1 قرار دارد؟

حل: ۱) داریم: $f(1) = 1 > 0$ و $f(0) = -3 < 0$ ، پس معادله لااقل یک ریشه مثبت در فاصله $(0,1)$ دارد که آن را x_1 می نامیم ، پس $f(x_1) = 0$. چون $f(x)$ یک تابع زوج است ، یعنی $f(-x) = f(x)$ ، بنابراین $f(-x_1) = 0$ ، در نتیجه $-x_1$ هم یک ریشه معادله $f(x) = 0$ است.

۲) تابع f با ضابطه $f(x) = a\sin x - x + b$ را در نظر می گیریم . این تابع بر سرتاسر اعداد حقیقی R پیوسته است . داریم

$$f(a+b) = a\sin(a+b) - (a+b) + b$$
$$= a\sin(a+b) - a = a(\sin(a+b) - 1) \le 0$$

و $f(0) = b > 0$. حال اگر $f(a+b) = 0$ که خود $a+b$ ریشه معادله $f(x) = 0$ است و اما اگر $f(a+b) < 0$ ، آنگاه بنابر قضیه ۱۳(الف) تابع $f(x)$ لااقل دارای یک ریشه در بازه $(0, a+b)$ است ، که این ریشه مثبت هم هست .

۳)از روی معادله داریم $f(-1) = 3m - 1$ و $f(1) = m - 3$.اکنون شرطی را پیدا می کنیم که $f(1)\, f(-1) < 0$ ، یعنی $(m-3)(3m-1) < 0$.

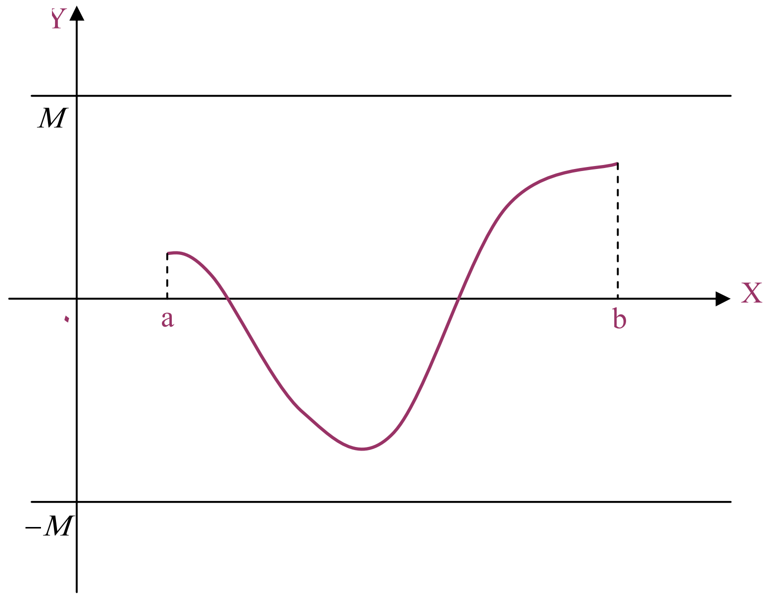
با استفاده از جدول تعیین علامت می توان نشان داد که این شرط معادل است با

$$\frac{1}{3} < m < 3$$

پس شرط آنکه معادله $f(x) = x^2 - (m+1)x + 2m - 3 = 0$ دارای ریشه ای بین 1 و -1 باشد آن است که $\frac{1}{3} < m < 3$.

یادآوری می کنیم که تابع f بر بازه بسته $[a,b]$ کراندار نامیده می شود ، هرگاه عددی مانند $M > 0$ وجود داشته باشد ، به طوری که برای هر $x \in [a,b]$ نامساوی $|f(x)| \le M$ ،

یعنی، $-M \le f(x) \le M$ برقرار باشد . به عبارت دیگر ، گراف تابع $f(x)$ از نوار محدود شده با خطوط مستقیم $y = M$ و $y = -M$ خارج نگردد .



شکل ۲ .۱۴

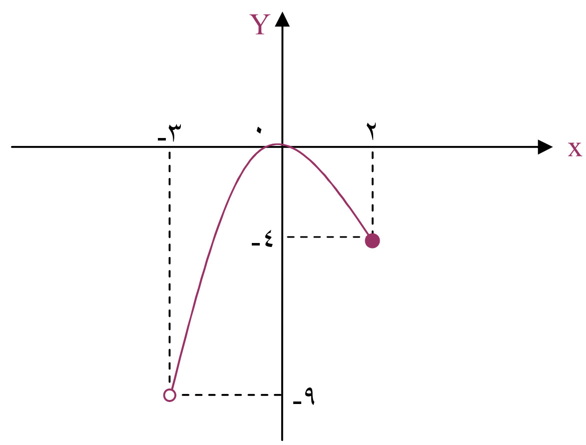
قضیه۱۴(الف): اگر تابع f بر بازه بسته $[a,b]$ پیوسته باشد ، آنگاه تـابع f بـر ایـن بـازه کراندار است.

تذکر: اگر در قضیه به جای بازه بسته $[a,b]$ از بازه بـاز (a,b) اسـتفاده کنـیم ، حکـم برقـرار نخواهد بود . به عنوان مثال ، تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ در $(0,1)$ پیوسته اسـت ، امـا کرانـدار نیسـت ، زیـرا $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$. اکنون به معرفی دو مفهوم جدید می پردازیم و پس از آن قضیه بسـیار مفیـدی را بیان می کنیم که کاربردهای فراوانی در ادامه این درس خواهد داشت.

تعریف: الف) گوییم تابع f بر مجموعه A دارای **ماکزیمم مطلق** است ، هرگاه نقطه ای ماننـد $c\in A$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x\in A$، آنگاه $f(x)\leq f(c)$. نقطـه c را **نقطـه ماکزیمم مطلق** تابع f بر محموعه A ، و $f(c)$ را **مقدار ماکزیمم مطلق** می نامیم.

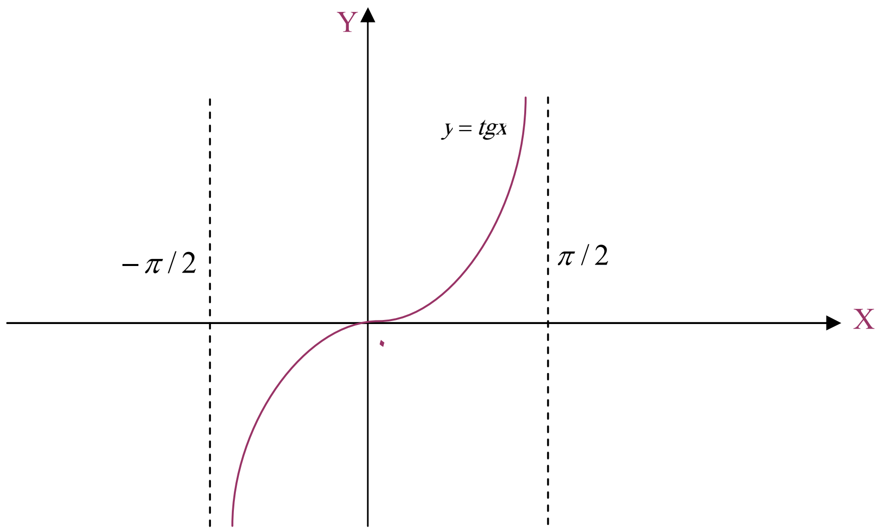
ب) گوییم تابع f بر مجموعه A دارای **مینیمم مطلق** است ، هرگاه نقطه ای مانند $d\in A$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x\in A$ ، $f(x)\geq f(d)$. نقطه d را **نقطه مینیمم مطلق** تابع f بر مجموعـه A ، و $f(d)$ را **مقدار مینیمم مطلق** مـی نـامیم.جملـه اکسـترمم مطلـق بـرای ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق به کار می رود.

به عنوان مثال:۱) تابع $f(x)=-x^2$ را در نظر می گیریم . گراف تابع را در فاصله $(-3,2]$ رسم می کنیم .تابع f در $(-3,2]$ دارای مینیمم مطلق نیست زیرا $\lim_{x\to -3^+} f(x)=-9$ ولی $f(x)$ در بازه داده شده همواره بزرگتر از -9 است. همان طور که در شکل دیده می شود ، تابع f دارای ماکزیمم مطلق 0 بر بازه $(-3,2]$ است



شکل ۲ .۱۵

۲)تابع $f(x)=\tan x$ در فاصله باز $(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ نه ماکزیمم مطلق داردونه مینیمم مطلق. به شکل بعد توجه کنید و ملاحظه کنید که وقتی $x\to\frac{\pi}{2}^-$، تابع به طور نامحدود بزرگ می شود و اگر $x\to\frac{-\pi}{2}^+$ تابع به طور نامحدود کوچک می گردد .



شکل ۲ .۱۶

۳)فرض کنیم تابع f با ضابطه زیر تعریف شده باشد:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & , \quad x<1 \\ x^2-6x+7 & , \quad x\geq 1 \end{cases}$$

گراف تابع در بازه بسته $[-5,4]$ را رسم کرده ایم . مقدار ماکزیمم مطلق تابع f بر بازه $[-5,4]$ در نقطه 1 رخ می دهد و $f(1)=2$ ، مقدار مینیمم تابع f بر $[-5,4]$ در نقطه -5 رخ می دهد و $.f(-5)=-4$

شکل ۲ .۱۷

در مثال های یاد شده دیده می شود که تنها وقتی فاصله ای بسته مانند $[a,b]$ داشته باشیم و بدانیم که تابع بر این فاصله پیوسته است ، می توانیم با اطمینان بگوییم که تابع دارای ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق است .

قضیه زیر ، که به **قضیه مقدار نهایی** معروف است ، در حساب دیفرانسیل و انتگرال از جایگاه خاصی برخوردار است.

قضیه۱۴(ب) (قضیه مقدار نهایی): اگر تابع f بر بازه بسته $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه f بر $[a,b]$ دارای ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق است. به عبارت دیگر ، دو عدد مانند x_1 و x_2 در بازه بسته $[a,b]$ وجود دارند ، به طوری که برای هر $x \in [a,b]$ داریم $f(x_2) \le f(x) \le f(x_1)$.

تعبیر هندسی: قضیه۱۴ (ب) بیان می کند که گراف یک تابع پیوسته در یک فاصله بسته دارای« بالاترین نقطه » P و « پایین ترین نقطه » Q است ، همان طور که در شکل بعدی نشان داده شده است .

شکل۲ . ۱۸

مثال۳۵: ۱) نشان دهید که تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ در بازه باز $(0,+\infty)$ کراندار نیست ، ولی برای هر $a>0$ در بازه $(a,+\infty)$ ، کراندار است

۲) اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ بر مجموعه A کراندار باشند و α عددی حقیقی باشد ، نشان دهید که توابع $f+g$ ، $f.g$ و αf نیز بر A کراندار هستند .

۳) نشان دهید که تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & , \quad x\neq 0 \\ 1 \quad , & x=0 \end{cases}$ بر R کراندار است .

۴) نشان دهید که تابع $f(x)=x\sin x$ بر R کراندار نیست .

حل: ۱) فرض کنیم $M>0$ عدد حقیقی دلخواهی باشد . نامساوی $\frac{1}{x}>M$ معادل است با $x<\frac{1}{M}$ ، و این نشان می دهد که برای هر عدد x بین 0 و $\frac{1}{M}$ داریم: $\frac{1}{x}>M$ و بنابراین $f(x)>M$. پس تابع $f(x)$ بر بازه $(0,+\infty)$ کراندار نیست . حال بازه $(a,+\infty)$ را در نظر می

گیریم که در آن $a>0$. اما $x>a \Leftrightarrow \frac{1}{x}<\frac{1}{a}$ ، بنابراین به ازای هر $x\in(a,+\infty)$ ، داریم $f(x)=\frac{1}{x}<\frac{1}{a}$ در نتیجه تابع $f(x)$ بر $(a,+\infty)$ کراندار است .

۲) چون توابع f و g بر A کراندار هستند ، پس اعداد مثبتی مانند M و N وجود دارند به طوری که

$$\forall x\in A, |f(x)|\le M, |g(x)|\le N$$

اکنون با توجه به تعریف حاصلجمع و حاصلضرب دو تابع و نیز خواص قدر مطلق داریم

$$\forall x\in A, |(f+g)(x)|=|f(x)+g(x)|\le |f(x)|+|g(x)|\le M+N,$$
$$|(f.g)(x)|=|f(x).g(x)|=|f(x)|.|g(x)|\le MN,$$
$$|(\alpha f)(x)|=|\alpha f(x)|=|\alpha||f(x)|\le|\alpha|M.$$

بنابراین توابع $\alpha f, f.g, f+g$ بر مجموعه A کراندار هستند .

۳) در مثال ۱۳ نشان دادیم که $\forall x\in R-\{0\}, \cos x\le\frac{\sin x}{x}\le 1$.

بنابراین داریم $\left|\frac{\sin x}{x}\right|\le 1$. از طرفی بر طبق تعریف $f(0)=1$ و بنابراین

$$\forall x\in R, \left|\frac{\sin x}{x}\right|\le 1 \Leftrightarrow \forall x\in R, |f(x)|\le 1$$

پس تابع $f(x)$ بر R کراندار است .

۴)فرض کنیم $M>0$ عدد حقیقی دلخواهی باشد . عدد طبیعی h_1 را می توان چنان بزرگ اختیار کرد که $2h_1\pi+\frac{\pi}{2}>M$ بنابراین

$$f(2h_1\pi+\frac{\pi}{2})=(2h_1\pi+\frac{\pi}{2})\sin(2h_1\pi+\frac{\pi}{2})=(2h_1\pi+\frac{\pi}{2}).1=$$
$$2h_1\pi+\frac{\pi}{2}>M$$

و این نشان می دهد که تابع $f(x)$ از بالا کراندار نیست . همچنین می توان عدد طبیعی h_2 را چنان بزرگ اختیار کرد که $\frac{\pi}{2}-2h_2\pi<-M$ و بنابراین

$$f(\frac{\pi}{2}-2h_2\pi)=(\frac{\pi}{2}-2h_2\pi)\sin(\frac{\pi}{2}-2h_2\pi)=(\frac{\pi}{2}-2h_2\pi).1<-M$$

و این نشان می دهد که تابع $f(x)$ از پایین نیز کراندار نیست .

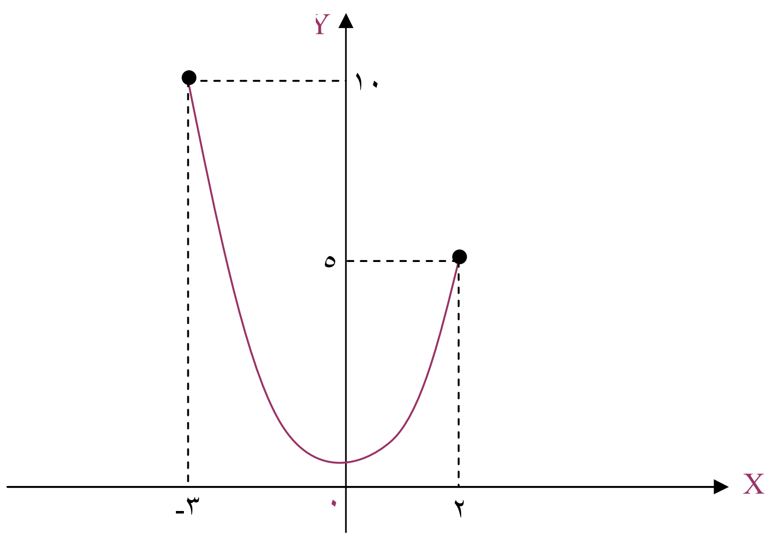
مثال۳۶: ماکزیمم و مینیمم مطلق توابع زیر را بر بازه های داده شده بررسی کنید:

۱) تابع $f(x)=x^2+1$ بر بازه $[-3,2]$،

۲) تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ بر بازه $[-1,1]$،

۳) تابع $f(x)=\begin{cases} x^3 & , \quad 0\le x<2 \\ -x & , \quad -2\le x<0 \\ 2x+6 & , \quad -4\le x<-2 \end{cases}$ بر بازه $[-4,2)$.

حل: ۱) چون برای هر x ، $x^2>0$ ، پس $f(x)=x^2+1\ge 1$ ، $\forall x\in[-3,2]$ و چون $f(0)=1$ پس $f(x)\ge f(0)$ ، $\forall x\in[-3,2]$ ،یعنی تابع $f(x)$ در $x=0$ دارای مینیمم مطلق $f(0)=1$ است .همچنین $-3\le x\le 2$ ، $\forall x\in[-3,2]$ ،پس $|x|\le \max\{|-3|,2\}=3$ و بنابراین $x^2\le 9$. در نتیجه $f(x)=x^2+1\le 10$. پس $f(x)=x^2+1\le 10=f(-3)$ ، $\forall x\in[-3,2]$ و این نشان می دهد که تابع در $x=-3$ دارای ماکزیمم مطلق $f(-3)=10$ بربازه $[-3,2]$ است .



شکل ۲ . ۱۹

۲) تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ بر بازه $[-1,1]$ نه دارای ماکزیمم مطلق و نه دارای مینیمم مطلق است. در حقیقت اگر $M>0$ عدد مثبت دلخواهی باشد ، آنگاه با فرض $0<x<\frac{1}{M}$ و $x\in[-1,1]$ داریم $f(x)=\frac{1}{x}>M$ ، پس $f(x)$ از هر عدد مثبت بزرگی می تواند بزرگتر شود و لذا ماکزیمم مطلق بر $[-1,1]$ ندارد . همچنین اگر $N<0$ عدد منفی دلخواهی باشد ، آنگاه با فرض $\frac{1}{N}<x<0$ و $x\in[-1,1]$ نتیجه می شود که $f(x)=\frac{1}{x}<N$ ، پس $f(x)$ از هر عدد منفی کوچکی می تواند کوچکتر شود و لذا مینیمم مطلق بر $[-1,1]$ ندارد .

شکل ۲ . ۲۰

۳) داریم $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} x^3=8$ ، و چون 2 متعلق به حوزه تعریف تابع نیست ،پس

$$0\le x<2 \Leftrightarrow x^3<8 \Leftrightarrow f(x)<8$$

همچنین برای $-4\le x<-2$ داریم $x<-2 \Rightarrow 2x<-4 \Rightarrow 2x+6<2$. پس برای $-4\le x<-2$ داریم $f(x)<2$. بالاخره برای $-2\le x<0$ داریم $0<f(x)=-x\le 2$. از آنچه گفته شد نتیجه می گیریم که برای هر $x\in[-4,2)$ همواره $f(x)<8$ و بنابراین با توجه به $\lim_{x\to 2^-} f(x)=8$ نتیجه می گیریم که تابع $f(x)$ بر $[-4,2)$ ماکزیمم مطلق ندارد . بسادگی دیده می شود که تابع در $x=-4$ دارای مینیمم مطلق $f(-4)=-2$ است .

شکل۲ . ۲۱